

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава I. Метрические пространства, пространства Банаха, унитарные пространства и пространства Гильберта . . . . .</b>	<b>13</b>
§ 1. Вводные понятия . . . . .	13
§ 2. Эрмитовы формы на векторном пространстве . . . . .	15
§ 3. Примеры унитарных пространств. Вещественные пространства . . . . .	16
§ 4. Определение гильбертова пространства . . . . .	20
§ 5. Пространство непрерывных отображений $\mathcal{C}(E, F)$ . . . . .	22
§ 6. Пополнение унитарного пространства . . . . .	25
Упражнения и дополнения . . . . .	28
<b>Глава II. Геометрия гильбертова пространства . . . . .</b>	<b>30</b>
§ 1. Линейная зависимость векторов, $n$ -мерное пространство . . . . .	30
§ 2. Бесконечномерное гильбертово пространство . . . . .	31
§ 3. Полные множества . . . . .	34
§ 4. Теорема Беппо Леви. Ортогональное разложение гильбертова пространства . . . . .	35
§ 5. Дефект подпространства. Общий вид линейного функционала . . . . .	40
§ 6. Теорема Хана—Банаха . . . . .	45
Упражнения и дополнения . . . . .	48
<b>Глава III. Локально выпуклые векторные пространства. Общая теорема о графике. Теорема о ядрах . . . . .</b>	<b>51</b>
Введение . . . . .	51
§ 1. Теорема Бэра . . . . .	52
§ 2. Теорема о замкнутом графике в линейных метрических пространствах . . . . .	53
§ 3. Другие теоремы Банаха и их связь с теоремой о графике . . . . .	56
§ 4. Билинейные формы . . . . .	58
§ 5. Локально выпуклые векторные пространства . . . . .	60
§ 6. Линейные отображения локально выпуклых пространств. Дальнейшие свойства борнологических пространств и $i$ -пространства . . . . .	70

§ 7. Построение локально выпуклых пространств . . . . .	74
§ 8. Примеры локально выпуклых пространств . . . . .	78
§ 9. Общая теорема о замкнутом графике . . . . .	81
§ 10. Тензорное произведение. Теорема о ядрах . . . . .	85
§ 11. Отображения, допускающие замыкание. Индексы оператора . . . . .	91
Упражнения и дополнения . . . . .	94
<b>Глава IV. Эрмитовы операторы. Спектральное разложение эрмитова оператора . . . . .</b>	<b>102</b>
§ 1. Сопряженные операторы . . . . .	102
§ 2. Примеры эрмитовых операторов . . . . .	106
§ 3. Спектральная теорема (конечномерный случай) . . . . .	107
§ 4. Спектральная теорема в произвольном гильбертовом пространстве . . . . .	109
Упражнения . . . . .	116
<b>Глава V. Симметрические и самосопряженные операторы. Самосопряженные расширения симметрических операторов . . . . .</b>	<b>117</b>
§ 1. Неограниченные операторы . . . . .	117
§ 2. Оператор $A^*$ . Примеры сопряженных операторов . . . . .	118
§ 3. Теоремы фон Неймана . . . . .	121
§ 4. Симметрические и полуограниченные операторы. Расширения по Фридрихсу . . . . .	123
§ 5. Спектральное представление полуограниченного оператора . . . . .	126
§ 6. Функции самосопряженного оператора. Операторное исчисление Стоуна — фон Неймана . . . . .	127
§ 7. О спектре самосопряженного оператора . . . . .	134
§ 8. Примеры симметрических дифференциальных операторов . . . . .	136
Дополнения . . . . .	138
<b>Глава VI. Изометрические и унитарные операторы. Расширение симметрического оператора до самосопряженного. Спектральная теорема для самосопряженного оператора . . . . .</b>	<b>139</b>
§ 1. Изометрические операторы . . . . .	139
§ 2. Расширение изометрического оператора до унитарного . . . . .	141
§ 3. Преобразование Кэли и доказательство теоремы фон Неймана . . . . .	142
§ 4. Примеры дифференциальных операторов, обладающих самосопряженными расширениями. Лемма Л. Морен . . . . .	144
§ 5. Спектральная теорема для общего самосопряженного оператора . . . . .	147
Упражнение . . . . .	149
<b>Глава VII. Вполне непрерывные операторы. Теория Рисса линейного уравнения с вполне непрерывным оператором. Примеры</b>	<b>150</b>
§ 1. Конечномерные операторы. Определение вполне непрерывного оператора . . . . .	150
§ 2. Свойства вполне непрерывных операторов . . . . .	153

§ 3. Теория Рисса линейных уравнений второго рода . . . . .	157
§ 4. Спектр вполне непрерывного эрмитова оператора. Теорема Гильберта — Шмидта . . . . .	161
§ 5. Спектральная теорема Реллиха . . . . .	163
§ 6. Слабая сходимость в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса . . . . .	166
§ 7. Операторы Гильберта — Шмидта . . . . .	170
§ 8. Отображения Гильберта — Шмидта . . . . .	173
§ 9. Ядерные отображения. Ядерные пространства . . . . .	175
Упражнения и дополнения . . . . .	179
Дополнение . . . . .	181
Упражнения (продолжение) . . . . .	183
<b>Глава VIII. Коммутативные банаховы алгебры. Теорема Гельфанда — Наймарка. Максимальные <math>C^*</math>-алгебры. Применения . . . . .</b>	<b>186</b>
§ 1. Алгебра ограниченных операторов в банаховом пространстве. Спектр оператора . . . . .	186
§ 2. Теорема максимальных идеалов Гельфанда . . . . .	190
§ 3. Коммутативные $C^*$ -алгебры. Теорема Гельфанда — Наймарка . . . . .	199
§ 4. Максимальные коммутативные $C^*$ -алгебры операторов в гильбертовом пространстве . . . . .	205
§ 5. Полнота системы коммутирующих операторов . . . . .	209
Упражнения . . . . .	211
<b>Глава IX. Прямые интегралы гильбертова пространства. Два доказательства спектральной теоремы. Теорема фон Неймана о диагонализации <math>C^*</math>-алгебр . . . . .</b>	<b>212</b>
§ 1. О банаховых алгебрах и теории Гельфанда — Наймарка . . . . .	212
§ 2. Доказательство спектральной теоремы, основанное на теореме Гельфанда — Наймарка . . . . .	214
§ 3. Прямые интегралы гильбертова пространства . . . . .	216
§ 4. Полная спектральная теорема фон Неймана . . . . .	218
§ 5. Банаховы алгебры без единицы. Второе доказательство полной спектральной теоремы . . . . .	225
Упражнения . . . . .	234
Библиографические замечания . . . . .	234
<b>Глава X. Однопараметрические полугруппы линейных операторов (теория Иосида). Теорема Стоуна. Теорема Гординга о представлениях групп Ли . . . . .</b>	<b>236</b>
§ 1. Эвристические рассуждения. Основные понятия . . . . .	236
§ 2. Теория Иосида . . . . .	238
§ 3. Теория Иосида (продолжение; доказательство второй теоремы Иосида) . . . . .	244
§ 4. Однопараметрические группы унитарных операторов . . . . .	246

§ 5. Дополняющие замечания . . . . .	248
§ 6. Теорема Гординга о представлениях группы Ли . . . . .	250
§ 7. Унитарные представления групп Ли. Представления алгебр Ли. Связи с квантовой механикой . . . . .	253
§ 8. Признаки самосопряженности (в существенном) представи- телей $dU(L)$ . . . . .	257
Упражнения . . . . .	264
Дополнения . . . . .	264
<b>Глава XI. Основная теорема о слабых решениях эллиптических си- стем. Функция Грина . . . . .</b>	<b>268</b>
§ 1. Основная теорема . . . . .	268
§ 2. Следствия основной теоремы о слабых решениях . . . . .	273
§ 3. Функция Грина и ее свойства . . . . .	275
Упражнения . . . . .	279
<b>Глава XII. Метод самосопряженных расширений . . . . .</b>	<b>280</b>
§ 1. Задача Дирихле . . . . .	280
§ 2. Задачи на собственные значения . . . . .	282
§ 3. О теории Вишика . . . . .	285
<b>Глава XIII. Краевые задачи и задачи на собственные значения для общих эллиптических операторов произвольного порядка Сильно эллиптические системы. Метод Галеркина . . . . .</b>	<b>289</b>
§ 1. Формулировка общей задачи Дирихле . . . . .	289
§ 2. Полуограниченность эллиптического оператора . . . . .	290
§ 3. Обобщенный интеграл Дирихле . . . . .	293
§ 4. Задача Дирихле . . . . .	298
§ 5. Пара уравнений с сопряженными операторами . . . . .	301
§ 6. Обобщенная задача Неймана . . . . .	302
§ 7. О методе Галеркина . . . . .	303
§ 8. Задача на собственные значения. Преобразование Грина . . . . .	305
Упражнения и дополнения . . . . .	308
<b>Глава XIV. Неравенства Эрлинга. Полная непрерывность оператора вложения. Лемма Соболева. Слабая полунепрерывность функционалов вариационного исчисления функций многих переменных . . . . .</b>	<b>311</b>
§ 1. Введение . . . . .	311
§ 2. Области Эрлинга . . . . .	312
§ 3. Неравенства Эрлинга . . . . .	314
§ 4. Предкомпактность подмножеств пространства $L^2$ . Полная не- прерывность оператора вложения $I_{l, k}$ . . . . .	322
§ 5. Пространства $H_{-k}$ . . . . .	326
§ 6. Проблемы вибраций . . . . .	328

§ 7. Проблемы вибраций (продолжение) . . . . .	330
§ 8. Полунепрерывные функции . . . . .	334
§ 9. Слабо полунепрерывные квадратичные формы. Формы Лежандра . . . . .	335
§ 10. Квадратичные формы вариационного исчисления . . . . .	340
§ 11. О функционалах, встречающихся в теории упругих пластин. Дифференцируемость элемента, на котором достигается абсолютный минимум . . . . .	344
§ 12. Коэрцитивность интегро-дифференциальных форм . . . . .	346
§ 13. О резольвенте эллиптической краевой задачи . . . . .	350
Упражнения и дополнения . . . . .	352
<b>Глава XV. Метод ортогональной проекции (принцип Дирихле) и его связь с методами Третьяка и Ритца . . . . .</b>	<b>354</b>
§ 1. Эвристические замечания . . . . .	354
§ 2. Пространство $\mathfrak{F}$ и его ортогональное разложение $Z \oplus U$ . . . . .	356
§ 3. О методе Третьяка и Ритца . . . . .	357
§ 4. Классическое построение последовательностей Третьяка и Ритца . . . . .	358
§ 5. Самосопряженные системы линейных эллиптических уравнений . . . . .	359
§ 6. Метод ортогональных проекций для общих неотрицательных эллиптических форм. Другие приближенные методы (метод Шварца и метод Пуанкаре) . . . . .	361
Упражнения . . . . .	367
<b>Глава XVI. Теорема Бохнера об аналитическом вложении компактного риманова пространства в евклидово пространство . . . . .</b>	<b>368</b>
§ 1. Идея доказательства . . . . .	368
§ 2. Спектр оператора $\Delta^\circ$ . . . . .	369
§ 3. Равномерная аппроксимация дифференцируемой функции посредством аналитических функций . . . . .	370
<b>Глава XVII. Общая теория разложений по собственным функциям. Спектральная теория общих ядер. . . . .</b>	<b>372</b>
Введение . . . . .	374
§ 1. Основная теорема и следствия из нее . . . . .	375
§ 2. При $m > N/2$ вложение $H_m(\Omega_N) \rightarrow H_0(\Omega_N)$ является отображением Гильберта — Шмидта . . . . .	379
§ 3. Теорема о разложении по собственным функциям для операторов классического анализа . . . . .	380
§ 4. Разложения по собственным функциям динамических систем . . . . .	385
§ 5. Теоремы о разложении по собственным функциям (продолжение). Построение ядерного пространства . . . . .	387
§ 6. Разложения по собственным функциям дифференциальных операторов на группе Ли . . . . .	390
§ 7. Спектральное представление (обобщенных) ядер . . . . .	392

- § 8. Теорема о разложении по собственным функциям, связанным с ядром Карлемана . . . . . 399
- § 9. Линейные эллиптические операторы произвольного порядка . . 407
- § 10. О разложении по «собственным функциям» произвольных само-  
сопряженных операторов в пространстве  $L^2(\Omega_n)$  . . . . . 410
- § 11. Обыкновенные дифференциальные операторы. Спектральные  
матрицы. Преобразование Фурье в  $L^2$  (теория Планшереля) . . 413
- § 12. Асимптотика спектральной функции полуограниченного само-  
сопряженного расширения эллиптического оператора . . . . . 421

### Глава XVIII. Метод Фурье . . . . . 426

- § 1. Эвристические рассуждения . . . . . 426
- § 2. Операторный вариант и его решение . . . . . 428
- § 3. Дифференцируемость обобщенного решения . . . . . 432
- § 4. Решение смешанных задач для параболических систем вида  
 $\frac{\partial u}{\partial t} = -A_x u$  . . . . . 435
- § 5. Смешанные задачи и задача Коши для уравнений типа  $\frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial t} =$   
 $= A_x u$  (уравнения квантовой механики) . . . . . 436
- § 6. Смешанная задача для неоднородных уравнений . . . . . 437
- § 7. Заключительные замечания . . . . . 438
- Упражнения . . . . . 440

### Глава XIX. Теория гармонических полей . . . . . 441

- § 1. Определение гармонического поля . . . . . 441
- § 2. Теоремы Кодаиры . . . . . 445
- § 3. Уравнение  $\frac{d\alpha}{dt} = \Delta\alpha$  и метод ортогональных проекций в теории  
гармонических полей . . . . . 447
- § 4. Построение оператора  $\Delta' \supset \Delta^0$ . Доказательство теорем Кодаиры  
и Гаффни . . . . . 448
- § 5. Гармонические поля на компактных многообразиях . . . . . 452
- § 6. Заключительные замечания . . . . . 453
- § 7. Некоторые приложения теории гармонических полей к исследо-  
ванию компактных римановых многообразий . . . . . 454

### Глава XX. Эргодическая теория . . . . . 457

- § 1. О (квази)эргодической гипотезе в статистической механике . . 457
- § 2. Метрическая транзитивность и эргодичность потока. Эргодиче-  
ская теорема фон Неймана . . . . . 458
- § 3. Доказательство эргодической теоремы . . . . . 462
- § 4. «Непосредственное» доказательство эргодической теоремы . . 463
- § 5. Эргодическая теорема Иосида — Какутани . . . . . 465
- § 6. Существование инвариантной меры на компактных динамических  
системах . . . . . 469
- Упражнения . . . . . 470

Глава XXI. Теория почти периодических функций и векторов. О представлениях топологических групп. Шаровые функции . . .	471
§ 1. Бохнеровская теория почти периодических функций Бора. Почти периодические векторы . . . . .	471
§ 2. Теория почти периодических векторов . . . . .	474
§ 3. Теория п. п. векторов (продолжение) . . . . .	477
§ 4. Скалярные почти периодические функции. Вторая основная теорема. Теорема Бора . . . . .	478
§ 5. Вторая основная теорема теории почти периодических векторов .	481
§ 6. Почти периодические функции и представления групп . . . . .	483
§ 7. Функции на однородных пространствах. Шаровые функции . .	486
Упражнения и дополнения . . . . .	486
Глава XXII. Общая теория дифференциальных операторов (теория Хёрмандера) . . . . .	489
§ 1. Введение . . . . .	489
§ 2. Существование фундаментального решения . . . . .	491
§ 3. Сравнение операторов с постоянными коэффициентами . . . . .	490
§ 4. Неравенства Трева и их следствия . . . . .	502
§ 5. Операторы главного типа с переменными коэффициентами . . .	508
§ 6. Априорные оценки в пространстве $\dot{H}_s$ . . . . .	511
Упражнения и дополнения . . . . .	518
Заключение. Исторические и библиографические замечания . . . .	528
Дополнение I. Общие сведения . . . . .	536
§ 1. Топология . . . . .	536
§ 2. Теория интеграла . . . . .	539
Дополнение II. Мера Хаара. Полупростые группы. Среднее почти периодического вектора . . . . .	547
Дополнение III . . . . .	553
Библиография . . . . .	555